# Mécanique analytique, Corrigé 8

*Assistants et tuteurs :*

jeanne.bourgeois@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch
lorenzo.fioroni@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch
jonas.daverio@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
mathias.findrihan@epfl.ch
remi.thomas@epfl.ch

**Rappel à propos du tenseur $\epsilon_{ijk}$**

Nous avons déjà introduit le tenseur totalement antisymétrique $\epsilon_{ijk}$, aussi appelé symbole de Levi-Civita, lors de la série 1. Ce corrigé commence par un petit rappel.

Le tenseur $\epsilon_{ijk}$ peut être défini par les règles suivantes : a) $\epsilon_{123} = 1$ ; b) une permutation de deux des trois indices produit un changement de signe ; c) $\epsilon_{ijk} = 0$ si un des indices est répété (c'est-à-dire si $i = j$ ou $j = k$ ou $i = k$). On rappelle quelques relations utiles. La première de ces relations est :

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{kmn} \;=\; \delta_{im}\, \delta_{jn} \;-\; \delta_{in}\, \delta_{jm}, \tag{1}$$

qui peut s'obtenir facilement en voyant que pour que ce produit soit non nul, il faut que la paire $(ij)$ coïncide avec la paire $(mn)$ (puisque l'indice $k$ est commun aux ensembles $\{i, j, k\}$ et $\{k, m, n\}$). Il y a deux façons d'associer un $i$ aux éléments de ces paires ($i$ avec $m$ ou $i$ avec $n$), le signe provenant de l'antisymétrie du symbole de Levi-Civita. Il découle de la relation précédente que

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ijk} \;=\; \sum_{i,j=1}^{3} (\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}) \;=\; 3 \cdot 3 - 3 = 6. \tag{2}$$

Comme l'utilisation de ce symbole fait souvent intervenir des indices muets sur lesquels on somme, une façon particulièrement rapide d'écrire ces expressions est d'omettre ce symbole de sommation. Une somme est donc implicite dès que deux indices sont répétés. La formule suivante sera très utile :

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{kmn} \;=\; \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{kmn}. \tag{3}$$

Cette convention est appelée convention de sommation d'Einstein. En combinant l'utilisation du tenseur $\epsilon_{ijk}$ et la convention de sommation d'Einstein, on simplifie potentiellement les calculs d'analyse vectorielle. En particulier, le produit scalaire et le produit vectoriel peuvent s'écrire de façon compacte sous la forme suivante :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_j \delta_{ij} = v_i w_i, \qquad \vec{v} \times \vec{w} = \epsilon_{ijk} v_j w_k.$$

Exercice 1 : Crochets de Poisson

a) Afin de montrer que si deux composantes du moment cinétique sont conservées, alors la troisième l'est aussi, nous allons utiliser le fait que si deux quantités sont conservées alors leur crochet de Poisson l'est aussi. Ceci, comme montré en cours, est une conséquence directe de l'identité de Jacobi. Le but est donc maintenant de calculer le crochet de Poisson de deux composantes du moment cinétique.

En utilisant le symbole de Levi-Civita défini plus haut, nous pouvons écrire en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \qquad \Rightarrow \qquad L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k.$$

Dès lors nous avons :

$$\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} &= \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\{x_a p_b, x_c p_d\} \\
&= \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\left(x_a\{p_b, x_c p_d\} + p_b\{x_a, x_c p_d\}\right) \\
&= \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\left(x_a x_c\{p_b, p_d\} + x_a p_d\{p_b, x_c\} + x_c p_b\{x_a, p_d\} + p_b p_d\{x_a, x_c\}\right).
\end{aligned}$$

Les termes s'annulent selon les propriétés des crochets fondamentaux, et il reste :

$$\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd} x_a p_d \delta_{bc} + \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd} x_c p_b \delta_{ad}.$$

En développant et en utilisant les identités vues précédemment :

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{kij}\left(\epsilon_{kad} x_a p_d\right) = \epsilon_{kij} L_k.$$

Ce qui prouve que si $L_i$ et $L_j$ sont conservés (avec $i \neq j$), alors $L_k$ (avec $k \neq i, j$) l'est aussi.

Le calcul précédent sans la notation d'Einstein se fait ainsi :

$$\begin{aligned}
\{L_1, L_2\} &= \{x_2 p_3 - x_3 p_2,\ x_3 p_1 - x_1 p_3\} \\
&= \{x_2 p_3, x_3 p_1\} - \{x_2 p_3, x_1 p_3\} - \{x_3 p_2, x_3 p_1\} + \{x_3 p_2, x_1 p_3\}.
\end{aligned}$$

En utilisant par exemple

$$\{x_a p_b, x_c p_d\} = -\delta_{bc} x_a p_d + \delta_{ad} x_c p_b,$$

on obtient :

$$\{L_1, L_2\} = -x_2 p_1 - 0 - 0 + x_1 p_2 = L_3.$$

Ainsi, la notation d'Einstein permet de calculer d'un seul coup les crochets de Poisson pour tout couple $\{L_i, L_j\}$.

b) i. *Analyse dimensionnelle.* L'équation définissant le potentiel donne :

$$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = \frac{[G]\,\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}} \qquad \Rightarrow \qquad [G] = \mathrm{kg^{-1}\,s^{-2}\,m^3}.$$

La mesure de $G$ se fait par exemple à l'aide d'un pendule de torsion et de la loi de Hooke, il s'agit de l'expérience de Cavendish. On trouve

$$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}}.$$

Si l'on se trouve à une distance $h$ de la surface terrestre, le potentiel gravitationnel est donné par

$$V(R_\oplus + h) = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus + h}, \tag{4}$$

où $R_\oplus \simeq 6370\,\mathrm{km}$ est le rayon de la Terre et $M_\oplus \simeq 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ sa masse.
Si $h \ll R_\oplus$, on peut approximer $V(R_\oplus + h)$ par un développement limité :

$$V(R_\oplus + h) \simeq V(R_\oplus) + V'(R_\oplus)h = V(R_\oplus) + m\,\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}\,h \simeq V(R_\oplus) + mgh, \tag{5}$$

où $g \equiv GM_\oplus R_\oplus^{-2} \simeq 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ est l'accélération de gravité à la surface de la Terre. Comme $V(R_\oplus)$ est une constante, on l'omet généralement et on utilise donc, pour des hauteurs $h \ll R_\oplus$, le potentiel approximé

$$V = mgh.$$

ii. *Conservation du moment cinétique et de l'énergie.* Pour montrer que le moment cinétique et l'énergie sont conservés, il suffit de vérifier qu'ils satisfont tous deux

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \tag{6}$$

L'Hamiltonien du système est

$$H(x_j, p_j) = \frac{p_j p_j}{2m} - \frac{GMm}{\sqrt{x_j x_j}}. \tag{7}$$

Ni le moment cinétique ni l'Hamiltonien ne dépendent explicitement du temps. Le fait qu'ils soient conservés revient donc à vérifier que leur crochet de Poisson avec l'Hamiltonien est nul. Pour l'Hamiltonien cela est trivial, car $\{H, H\} = 0$.
Le crochet de Poisson de la $i$-ème composante du moment cinétique avec l'Hamiltonien s'écrit

$$\{L_i, H\} = \epsilon_{ijk}\{x_j p_k, H\} = \epsilon_{ijk}\left(x_j\{p_k, H\} + p_k\{x_j, H\}\right). \tag{8}$$

On calcule séparément $\{p_i, H\}$ et $\{x_i, H\}$ :

$$\{p_i, H\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{GMm}{r^3}\,x_i, \tag{9}$$

$$\{x_i, H\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}, \tag{10}$$

où l'on a utilisé pour tout vecteur $\vec{a}$, $\partial a_i/\partial a_j = \delta_{ij}$.
En injectant ces deux résultats dans l'expression de $\{L_i, H\}$, on obtient :

$$\{L_i, H\} = \epsilon_{ijk}\left(-\frac{GMm}{r^3}x_j x_k + \frac{p_j p_k}{m}\right) \tag{11}$$

Les termes $\epsilon_{ijk}x_j x_k = (\vec{x} \times \vec{x})_i$ et $\epsilon_{ijk}p_j p_k = (\vec{p} \times \vec{p})_i$ sont les composantes d'un produit vectoriel de deux vecteurs parallèles et sont donc nuls. Ainsi,

$$\boxed{\{L_i, H\} = 0,}$$

ce qui montre que le moment cinétique est une quantité conservée.

iii. *Conservation du vecteur de Laplace-Runge-Lenz.* Afin de montrer que le vecteur de Laplace–Runge–Lenz est une constante du mouvement, il faut vérifier que son crochet de Poisson avec l'Hamiltonien est nul. Pour cela, on commence par exprimer $\vec{K}$ en coordonnées cartésiennes. Comme $\vec{r} = \vec{x}$ et $\vec{p} = \vec{p}$, la $i$-ème composante s'écrit

$$K_i = \frac{1}{m}\,\epsilon_{ijk} p_j L_k - GMm\,\frac{x_i}{\sqrt{x_j x_j}} = \frac{1}{m}\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} x_m p_j p_n - GMm\,\frac{x_i}{\sqrt{x_j x_j}}. \tag{12}$$

Calculons d'abord le crochet de Poisson du premier terme avec $H$ :

$$\frac{1}{m}\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}\{x_m p_n p_j, H\} = \frac{1}{m}\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}\left(x_m p_n\{p_j, H\} + x_m p_j\{p_n, H\} + p_n p_j\{x_m, H\}\right). \tag{13}$$

Or on sait que

$$\{p_j, H\} = -\frac{GMm}{r^3} x_j, \qquad \{x_m, H\} = \frac{p_m}{m}.$$

Les deux derniers termes de l'expression du crochet sont nuls car ils contiennent le produit $\epsilon_{kmn}$ avec un objet symétrique en $(mn)$. Ainsi, il ne reste que :

$$\frac{1}{m}\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} x_m p_n\{p_j, H\} = \frac{GM}{r^3}\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} x_m p_n x_j = \frac{GM}{r^3}\,(r^2 p_i - x_i x_n p_n). \tag{14}$$

*Note : pour simplifier les calculs, on peut également utiliser la conservation du moment cinétique démontrée à la question précédente, garder le terme $L_k$ dans la définition de $K_i$ et simplifier l'expression de $\{K_i, H\}$ grâce à l'identité $\{L_k, H\} = 0$.*

Passons maintenant au second terme du crochet de Poisson :

$$-GMm\left\{\frac{x_i}{\sqrt{x_j x_j}}, H\right\} = -GMm\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{x_i}{\sqrt{x_j x_j}}\right)\frac{\partial H}{\partial p_k}. \tag{15}$$

Comme $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{p_k}{m}$, on obtient

$$-GMm\left\{\frac{x_i}{\sqrt{x_j x_j}}, H\right\} = -\,\frac{GM}{r^3}\,(r^2 p_i - x_i x_k p_k). \tag{16}$$

Les deux contributions sont donc opposées et se compensent exactement :

$$\boxed{\{K_i, H\} = 0}.$$

Le vecteur de Laplace–Runge–Lenz est bien une constante du mouvement.

iv. *Direction des vecteurs $\vec{L}$ et $\vec{K}$.* Le moment cinétique $\vec{L}$ est perpendiculaire au plan défini par $\vec{r}$ et $\vec{p}$. Le vecteur $\vec{K}$ appartient à ce même plan ; il est donc automatiquement perpendiculaire à $\vec{L}$.

## Exercice 2 : Deux masses avec ressort et contraintes

On choisit comme coordonnées généralisées $z_1$, $\phi_1$, $z_2$ et $\phi_2$ de sorte que :

$$x_1 = R_1\cos\phi_1, \qquad y_1 = R_1\sin\phi_1 \tag{17}$$

$$x_2 = R_2\cos\phi_2, \qquad y_2 = R_2\sin\phi_2 \tag{18}$$

a) On calcule ici le Lagrangien $L = T - V$. On commence par l'énergie cinétique :

$$\dot{x}_1 = -R_1\dot{\phi}_1 \sin\phi_1, \qquad \dot{y}_1 = R_1\dot{\phi}_1 \cos\phi_1 \tag{19}$$

$$\dot{x}_2 = -R_2\dot{\phi}_2 \sin\phi_2, \qquad \dot{y}_2 = R_2\dot{\phi}_2 \cos\phi_2 \tag{20}$$

Donc

$$T = \frac{1}{2}m_1(R_1^2\dot{\phi}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(R_2^2\dot{\phi}_2^2 + \dot{z}_2^2) \tag{21}$$

Enfin, le potentiel du ressort est défini par $V = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ où

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} && (22) \\ &= \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2} && (23) \end{aligned}$$

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}m_1(R_1^2\dot{\phi}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(R_2^2\dot{\phi}_2^2 + \dot{z}_2^2) && (24) \\ &- \frac{1}{2}k\left(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2} - l_0\right)^2 && (25) \end{aligned}$$

On peut facilement écrire les équations d'Euler–Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

En remplaçant les coordonnées généralisées et leurs dérivées on obtient :

$$\begin{aligned} m_1R_1^2\ddot{\phi}_1 + kR_1R_2\sin(\phi_1 - \phi_2)\frac{(l - l_0)}{l} &= 0 && (26) \\ m_2R_2^2\ddot{\phi}_2 - kR_1R_2\sin(\phi_1 - \phi_2)\frac{(l - l_0)}{l} &= 0 && (27) \\ m_1\ddot{z}_1 + k(z_1 - z_2)\frac{(l - l_0)}{l} &= 0 && (28) \\ m_2\ddot{z}_2 - k(z_1 - z_2)\frac{(l - l_0)}{l} &= 0 && (29) \end{aligned}$$

avec

$$l = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2}.$$

b) Pour trouver les moments conjugués, on utilise

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{30}$$

On obtient donc

$$p_{\phi_1} = m_1R_1^2\dot{\phi}_1, \qquad p_{\phi_2} = m_2R_2^2\dot{\phi}_2 \Rightarrow \dot{\phi}_1 = \frac{p_{\phi_1}}{m_1R_1^2}, \quad \dot{\phi}_2 = \frac{p_{\phi_2}}{m_2R_2^2},$$

$$p_{z_1} = m_1 \dot{z}_1, \qquad p_{z_2} = m_2 \dot{z}_2 \Rightarrow \dot{z}_1 = \frac{p_{z_1}}{m_1}, \quad \dot{z}_2 = \frac{p_{z_2}}{m_2}.$$

On peut écrire le Hamiltonien à l'aide de la tranformée de Légendre :

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{31}$$

Le Hamiltonien est donc

$$H = \frac{p_{\phi_1}^2}{m_1 R_1^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{m_2 R_2^2} + \frac{p_{z_1}^2}{m_1} + \frac{p_{z_2}^2}{m_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_{\phi_1}^2}{m_1 R_1^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{m_2 R_2^2} + \frac{p_{z_1}^2}{m_1} + \frac{p_{z_2}^2}{m_2}\right) \tag{32}$$

$$+ \frac{1}{2} k \left(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2} - l_0\right)^2 \tag{33}$$

On peut regrouper les termes :

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{\phi_1}^2}{m_1 R_1^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{m_2 R_2^2} + \frac{p_{z_1}^2}{m_1} + \frac{p_{z_2}^2}{m_2}\right) \tag{34}$$

$$+ \frac{1}{2} k \left(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2} - l_0\right)^2 \tag{35}$$

Les équations de Hamilton sont définies par :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{36}$$

ce qui nous donne :

$$\dot{\phi}_1 = \frac{p_{\phi_1}}{m_1 R_1^2}, \qquad \dot{\phi}_2 = \frac{p_{\phi_2}}{m_2 R_2^2}, \qquad \dot{z}_1 = \frac{p_{z_1}}{m_1}, \qquad \dot{z}_2 = \frac{p_{z_2}}{m_2}.$$

$$\dot{p}_{\phi_1} = -k\frac{l - l_0}{l} R_1 R_2 \sin(\phi_1 - \phi_2), \qquad \dot{p}_{\phi_2} = +k\frac{l - l_0}{l} R_1 R_2 \sin(\phi_1 - \phi_2),$$

$$\dot{p}_{z_1} = -k\frac{l - l_0}{l}(z_1 - z_2), \qquad \dot{p}_{z_2} = +k\frac{l - l_0}{l}(z_1 - z_2),$$

avec

$$l = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2}.$$

c) Le changement de variable $q_i \to Q_i$ et $p_i \to P_i$ est canonique si $\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$ et $\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0$. Ici la notation $\{,\}_{q,p}$ indique que le crochet de Poisson est calculé en prenant les dérivées par rapport aux anciennes variables $(q_i, p_i)$.

On calcule donc patiemment tous les crochets de Poisson :

$$\{Z, P_z\} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2} = 1, \tag{37}$$
$$\{z, p_z\} = \frac{m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_1}{m_1+m_2} = 1, \tag{38}$$
$$\{\Phi, P_\Phi\} = \frac{m_1R_1^2}{m_1R_1^2+m_2R_2^2} + \frac{m_2R_2^2}{m_1R_1^2+m_2R_2^2} = 1, \tag{39}$$
$$\{\phi, p_\phi\} = \frac{m_2R_2^2}{m_1R_1^2+m_2R_2^2} + \frac{m_1R_1^2}{m_1R_1^2+m_2R_2^2} = 1, \tag{40}$$
$$\{Z, z\} = 0, \qquad \{Z, P_\Phi\} = 0, \qquad \{Z, P_\phi\} = 0, \tag{41}$$
$$\{Z, p_z\} = \frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2} - \frac{m_2}{m_1+m_2} - \frac{m_1}{m_1+m_2} = 0, \tag{42}$$
$$\{Z, \Phi\} = 0, \qquad \{Z, \phi\} = 0, \qquad \{\Phi, P_z\} = 0, \qquad \{\phi, P_z\} = 0, \tag{43}$$
$$\{Z, \phi\} = 0, \quad \{Z, P_\phi\} = 0, \quad \{z, \Phi\} = 0, \quad \{z, P_\Phi\} = 0, \quad \{z, \phi\} = 0, \quad \{z, P_\phi\} = 0, \tag{44}$$
$$\{\Phi, P_\Phi\} = 1, \qquad \{\phi, P_\phi\} = 1 - 1 = 0. \tag{45}$$

La transformation est donc bien canonique.

Nous voulons maintenant exprimer l'Hamiltonien dans ce nouveau système de coordonnées. On exprime d'abord les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles :

$$z_1 = \frac{MZ + m_2 z}{M}, \qquad z_2 = \frac{MZ - m_1 z}{M} \tag{46}$$

$$p_{z_1} = \frac{m_1 P_Z + M p_z}{M}, \qquad p_{z_2} = \frac{m_2 P_Z - M p_z}{M} \tag{47}$$

$$\phi_1 = \frac{I\Phi + m_2R_2^2\phi}{I}, \qquad \phi_2 = \frac{I\Phi - m_1R_1^2\phi}{I} \tag{48}$$

$$p_{\phi_1} = \frac{m_1R_1^2P_\Phi + Ip_\phi}{I}, \qquad p_{\phi_2} = \frac{m_2R_2^2P_\Phi - Ip_\phi}{I} \tag{49}$$

où

$$M = m_1 + m_2, \qquad I = m_1R_1^2 + m_2R_2^2.$$

En utilisant ces égalités, on calcule les contributions cinétique et potentielle :

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{\phi_1}^2}{m_1R_1^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{m_2R_2^2} + \frac{p_{z_1}^2}{m_1} + \frac{p_{z_2}^2}{m_2}\right) \tag{50}$$

Substitution donne :

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{P_Z^2}{M} + \frac{p_z^2 M}{m_1m_2} + \frac{P_\Phi^2}{I} + \frac{p_\phi^2 I}{m_1m_2R_1^2R_2^2}\right) \tag{51}$$

Le potentiel s'écrit, en utilisant $\phi_1 - \phi_2 = \phi$ et $z_1 - z_2 = z$ :

$$V = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2} - l_0\right)^2 \tag{52}$$

$$= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\phi + z^2} - l_0\right)^2 \tag{53}$$

On obtient finalement l'Hamiltonien dans le nouveau système de coordonnées :

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{P_Z^2}{M} + \frac{p_z^2 M}{m_1 m_2} + \frac{P_\Phi^2}{I} + \frac{p_\phi^2 I}{m_1 m_2 R_1^2 R_2^2}\right) \tag{54}$$

$$+ \frac{1}{2}k\left(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\phi + z^2} - l_0\right)^2 \tag{55}$$